数理解析研究所講究録 第2124巻 2019年 1-16

制約条件がある場合の正規母平均の最尤推定量と一般化ベイズ推定量

目白大学・社会学部　張　元宗 *　慶應義塾大学・理工学部　篠崎　信雄
*Chang Yuan-Tsung, Department of Social Information, Mejiro University
Shinozaki Nobuo, Faculty of Science and Technology, Keio University

1. はじめに

制約された母数空間における推定問題が数多く考えられるが、母平均に関する代表的な線形制約条件は次のようなものが挙げられる。(1) 非負性 (2) 順序制約 (simple order) (3)simple tree order (4) 傘型順序制約である。例えば、順序制約は、年齢とともに平均値が大きくなると考えられる量（児童の身長など)、薬品の投与量とともに平均的に大きくなると考えられる反応量などの場合に考えられている。このような場合の統計的推測について、古くから様々の研究が進められてきているが、1988 年以前の研究については、Barlow et al.(1972) や Robertson et al. (1988) で詳しく解説されている。その後の発展、特に、点推定及び区間推定については、Silvapulle & Sen(2005) や van Eeden(2006) のモノグラフによって解説されている。また、篠崎 (Shinozaki) と張 (Chang) は制約条件を考慮する最尤推定量（RMLE）による改良問題について研究を推進している。

しかし、RMLE による改良はついては、決していつでも不偏推定量（UB) を改良するとは限らず、線形制約条件の場合でも、次元の問題、制約本数の問題、さらに推定する線形関数により様々な状況が起こる。特に、次元が増えると一般にリスクの評価が複雑になり、改良できるか否かを議論することが困難となる。simple tree order 制約条件の下で、ルーツ (roots) を推定するとき、次元がかなり大きいとき、Lee(1988) は制約条件を満たす MLE は制約条件を考慮しない UB を改良することが出来ないことを明らかにした。ま

* 〒161-8539 東京都新宿区中落合４－３１－１・電話番号：03-5996-3127・e-mail:cho@mejiro.ac.jp

た、独立な非負の正規母平均の線形関数の推定問題に関して、Shinozaki & Chang(1999) は RMLE が UB より良くなるための必要十分条件は次元が 4 以下であることを示した（Fernandez et al. (2000), Kubokawa et al. (2011),(2012))。一方、制約条件の本数については、線形不等式が 2 本ある場合の母平均の線形関数の推定に関して、任意の係数に対して、RMLE は常に UB を改良することが Rueda & Salvador(1995) によって示された。しかし、制約条件が 3 本以上の場合について、十分には議論されていない。

一方、RMLE に代わる推定量も研究される。例えば、津熊 (Tsukuma) 久保川 (Kubokawa) (2008)、 Marchand, Strawderman (2004) は一般ベイズ推定量の許容性およびミニマックス性などについて精力的に研究を進めている。

ここでは、正規母平均に制約条件がある場合に、ベイズ法と最尤法による正規母平均の推定問題を下記のように考える。

1) 非負な正規母平均の一般化ベイズ推定量に基づく同時推定問題を考える。この問題については、一次元の場合、分散が既知のとき、事前分布を指数分布にした一般化ベイズ推定量が Katz（1961）によって提案され、許容的でミニマックス推定量であることは証明された。Chang (1981) は提案された一般化ベイズ推定量に基づいて、p 次元の非負な正規母平均の同時推定量を提案し、改良になるための十分条件を示した。ここでは、未知で等しい分散を持つ p 個の非負な正規母平均の同時推定を考え、代入法により、Katz タイプ推定量に基づく同時推定量を提案し、改良となるための十分条件を与える。

2) 次元の問題を解決するために有効と考えられる 2 次元正規分布の分散共分散行列が既知で、順序制約がある母平均の推定問題を考える。Hwang and Peddada(1994) または、Peddada et al. (2005) が提案した推定量の妥当性はあまり明らかにされていないため、ここでは、確率優越性の評価基準の下で、制約条件を満たす最尤推定量が Hwang and Peddada(1994)、または Peddada et al. (2005) が提案した推定量より優れていることを明らかにする。また、Pitman nearness の評価基準の下でも同様な結果が得られる。さらに、線形関数の推定を考え、最尤推定量が両推定量がよりよくなるための、係数に対する必要十分条件を与える。

2. 未知で等しい分散を持つｐ個の非負な正規母平均の同時推定

$X_1, \ldots, X_p$ を互いに独立に正規分布 $N(\theta_i, \sigma^2), i = 1, \ldots, p$ にしたがう確率変数とし、$\theta_i \geq 0$ とする。等分散 σ^2 が未知で、標準化 2 乗誤差損失関数を基準として、母平均 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_p)'$ の同時推定問題を考える。

分散が既知で、1 次元の場合、Katz(1961) は θ の事前分布を非負な区間の上の一様分布とするとき、θ の一般化 Bayes 推定量

$$\delta(X) = X + \sigma\psi(X/\sigma) \tag{2.1}$$

を提案し、$\delta(X)$ は θ のミニマックス推定量であり、許容的な推定量でもあることを示した、ここで、

$$\psi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt}, \quad \psi(0) = \sqrt{2/\pi},$$

である。$\delta(x), \psi(x)$ はつぎのの性質を満たしている。

a) $x + \psi(x) \geq 0,$
b) $\psi'(x) = -\psi(x)(x + \psi(x)) \leq 0,$
c) $x + \psi(x)$ は x の増加関数である

p 次元の場合に対しても $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X}) = (\delta(X_1), \ldots, \delta(X_p))$ は $\boldsymbol{\theta}$ の一般化 Bayes 推定量である。しかし、$\boldsymbol{\theta}$ を同時推定するとき、標準化 2 乗誤差損失関数の下で、張 (1982) は $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X})$ を改良する縮小推定量

$$\delta_i^c(\boldsymbol{X}) = \left(1 - \frac{c\sigma^2}{||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X})||^2}\right)\delta(X_i) \tag{2.2}$$

を提案し、 $\boldsymbol{\delta}^c(\boldsymbol{X}) = (\delta_1^c(\boldsymbol{X}), \ldots, \delta_p^c(\boldsymbol{X}))$ が $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X})$ よりよくなるための十分条件 $p \geq 3, 0 \leq c \leq 2(p-2)$ を与えた、ここで $||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X})||^2 = \sum_{i=1}^{p} \delta^2(X_i)$ である。

本研究の目的は分散 σ^2 が未知の場合、分散が既知の場合の推定量 (2.1) に分散の推定量を代入して得られる推定量

$$\delta(X_i, S) = X_i + a\sqrt{S}\psi(X_i/(a\sqrt{S}))$$

に基づく縮小推定量

$$\delta_i^c(\boldsymbol{X}, S) = \left(1 - \frac{cS}{||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X}, S)||^2}\right)\delta(X_i, S) \tag{2.3}$$

を提案し、$\delta(X_i, S),\ i=1,\ldots,p$ を改良するための十分条件を与える、ここで、$S \sim \sigma^2\chi^2_n$ は X_i と互いに独立とする。さらに、$\delta^c_i(\boldsymbol{X}, S)$ を含む 2 つの Baranchik タイプ縮小推定量のクラスを提案する。証明のためには、下記の予備定理が有用である。

予備定理 2.1. 全ての $-\infty < X < \infty$ に対して、

a) $S\psi(X/S)$ は S の増加関数である。
b) $\delta(X, S)$ は S の増加関数である。(よって、 $||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X}, S)||^2$ は S の増加関数である).
c) $-S\psi'(X/(a\sqrt{S}))$ は $\sqrt{S}$ の増加関数である。
d) $S^{-1}(X+\sqrt{S}\psi(X/\sqrt{S}))$ は $\sqrt{S}$ の減少関数である。(よって、 $||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X}, S)||^2/S^2$ は $\sqrt{S}$ の減少関数である。)

が成立する。

予備定理 2.2. (χ^2 identity) $S \sim \sigma^2\chi^2_n$ とする。

$$E[h(S)S\sigma^2] = \frac{E[S^2h(S)] - 2\sigma^2 E[S^2h'(S)]}{n+2}$$

が成立する。

予備定理 2.3. $g(s)$ は s_0 で負の値から正の値に変化するものとし、 $h(s)$ は非減少関数であるとすると

$$E[g(S)h(S)] \geq E[g(S)]h(s_0)$$

が成立する。

下記の結果が得られる。

定理 2.4. 標準化 2 乗誤差損失のもとで、$\boldsymbol{\delta}^c(\boldsymbol{X}, S)$ が $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X}, S)$ を改良するための十分条件は

$$p \geq 3,\ 0 < c < 2\frac{p-2}{n+2},\ a^2 \geq \frac{1}{n-4}, n \geq 5.$$

上の結果を下記のような 2 つの Baranchik タイプ推定量のクラスに拡張する。
タイプ 1 :

$$F = ||\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X}, S)||^2/S = a^2\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{X_i}{a\sqrt{S}} + \psi\left(\frac{X_i}{a\sqrt{S}}\right)\right)^2 \quad とし、$$

$$\delta_i^B(\boldsymbol{X}, S) = \left(1 - \frac{r(F/S)}{F}\right)\delta(X_i, S)$$

とするとき、次の定理が得られる。

定理 2.5. $\boldsymbol{\delta}^B(\boldsymbol{X}, S)$ が $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X}, S)$ を改良するための十分条件は下記のようである。

i) $r(F/S)$ は F/S の単調非減少関数
ii) $r(F/S)/(F/S)$ は F/S の単調非増加関数
iii) $0 \leq r(F/S) \leq 2\frac{p-2}{n+2}$, $a^2 \geq 1/(n-4), n \geq 5.$

標本の大きさに対する条件を緩和するため、次のような推定量のクラスを提案する。
タイプ 2：

$$\tilde{F} = a^2 \sum_{i=1}^{p} \max\left\{\frac{X_i}{a\sqrt{S}} + \psi\left(\frac{X_i}{a\sqrt{S}}\right), \sqrt{2/\pi}\right\}^2 \geq F$$

を定義し、

$$\delta_i^{B\tilde{F}}(\boldsymbol{X}, S) = \left(1 - \frac{r(\tilde{F})}{\tilde{F}}\right)\delta(X_i, S)$$

とすとき、次の定理が得られる。

定理 2.6. $\boldsymbol{\delta}^{B\tilde{F}}(\boldsymbol{X}, S)$ が $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{X}, S)$ を改良するための十分条件は下記のようである。

i′) $r(\tilde{F})$ は $\tilde{F}$ の単調非減少関数
ii′) $r(\tilde{F})/\tilde{F}$ は $\tilde{F}$ の単調非増加関数
iii′) $0 \leq r(\tilde{F}) \leq 2\frac{p-2}{n+2}$, $a^2 \geq 1/(n-2), n \geq 3.$

3. 分散共分散が既知の場合における順序制約条件がある２つの正規母平均の推定

多くの研究者は母数に順序制約条件 (simple order) がある場合、または母数に simple tree order がある場合の母数の推定を考えている。特に独立な正規分布において、不偏推定量を改良するような推定量を提案している。

ここでは、次元の問題を解決するための一つの方法として、分散共分散が既知の場合における順序制約条件がある 2 つの正規母平均の推定を考える。

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)' \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従い、分散共分散行列

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

は既知で、$|\rho| \neq 1$、 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$ とし、$\mu_i, i = 1, 2$ に順序制約, $\mu_1 \leq \mu_2$, がある場合の $\mu_i, i = 1, 2$ の推定を考える。$\rho = 0$ の場合、μ_i の最尤推定量は

$$\hat{\mu}_1 = \min\left\{\bar{X}_1, \frac{\sigma_2^2\bar{X}_1 + \sigma_1^2\bar{X}_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right\},\ \hat{\mu}_2 = \max\left\{\bar{X}_2, \frac{\sigma_2^2\bar{X}_1 + \sigma_1^2\bar{X}_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right\} \tag{3.1}$$

である。$\rho \neq 0$ の場合、Hwang, Peddada (1994) は $\hat{\mu}_i$ を拡張した $\boldsymbol{\mu}$ の推定量

$$\hat{\mu}_1^{HP} = \min\left\{\bar{X}_1, \alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2\right\},\ \hat{\mu}_2^{HP} = \max\left\{\bar{X}_2, \alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2\right\} \tag{3.2}$$

を提案、 $\hat{\mu}_i^{HP}$ は確率的に $\bar{X}_i, i = 1, 2$ より優れていることを証明した。ここで、 $\alpha = \omega_1/(\omega_1 + \omega_2)$, $\beta = \omega_2/(\omega_1 + \omega_2)$、$\omega_1 = \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2$, $\omega_2 = \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2$。$\omega_1, \omega_2$ は負になることががあるが、 $|\rho| \neq 1$ であるので、 $\omega_1 + \omega_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(1-\rho)\sigma_1\sigma_2 > 0$ である。$\rho = 0$ の場合、$\hat{\mu}_i^{HP} = \hat{\mu}_i$ になる。一方、Peddada et al. (2005) は $\omega_1\omega_2 < 0$ の場合、推定量 $\hat{\mu}_i^{HP}, i = 1, 2$ は一致推定量にならないことに気づき、$\hat{\mu}_i^{HP}$ を次のように修正し、$\bar{X}_i$ より確率的に優れていることを証明した。

$$\hat{\mu}_1^{PDT} = \min\left\{\bar{X}_1, \alpha^*\bar{X}_1 + \beta^*\bar{X}_2\right\},\ \hat{\mu}_2^{PDT} = \max\left\{\bar{X}_2, \alpha^*\bar{X}_1 + \beta^*\bar{X}_2\right\}, \tag{3.3}$$

ここで、$\alpha^* = \omega_1^+/(\omega_1^+ + \omega_2^+)$, $\beta^* = \omega_2^+/(\omega_1^+ + \omega_2^+)$, $a^+ = \max\{a, 0\}$. しかし、提案した両推定量の妥当性はあまり調べられておらず、不自然な場合がある。たとえば、$\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ および $\omega_2 < 0$ の場合、制約条件を満たしていないのに、μ_1 の推定量を $\hat{\mu}_1^{HP} = \bar{X}_1$ にするような不自然さがある。逆に、$\bar{X}_2 > \bar{X}_1$ の場合、制約条件を満たしているのに、$\bar{X}_1$ を原点に縮小するような不自然さがある。同様に、このようなことは $\hat{\mu}_1^{PDT}$ に対しても起こる。ここでは、制約条件を満たす $\boldsymbol{\mu}$ の最尤推定量

$$\hat{\mu}_1^{MLE} = \bar{X}_1 - \beta(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+,\ \hat{\mu}_2^{MLE} = \bar{X}_2 + \alpha(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+, \tag{3.4}$$

と両推定量 $\hat{\mu}_i^{HP}, \hat{\mu}_i^{PDT}$ との比較を行い、両推定量より確率的に優れていることを明らかにする。

まず、$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)'$ とし、2 次元平面の 3 つの領域を

$$D_1 = \{\boldsymbol{y} | y_1 + y_2 > 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\},\ D_2 = \{\boldsymbol{y} | y_1 + y_2 > 0, y_2 < 0\},$$
$$D_3 = \{\boldsymbol{y} | y_1 + y_2 > 0, y_1 < 0\}$$

とすると、$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2)'$ は D_1,D_2,D_3 のいずれか属し、3 推定量の関係はつぎのように整理される。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}\in D_1 : &\hat{\mu}_1^{MLE}=\hat{\mu}_1^{HP}=\hat{\mu}_1^{PDT}=\bar{X}_1-\beta(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^+,\\
&\hat{\mu}_2^{MLE}=\hat{\mu}_2^{HP}=\hat{\mu}_2^{PDT}=\bar{X}_2+\alpha(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^+,\\
\boldsymbol{\omega}\in D_2 : &\hat{\mu}_1^{MLE}=\bar{X}_1-\beta(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^+,\hat{\mu}_1^{HP}=\bar{X}_1+\beta(\bar{X}_2-\bar{X}_1)^+,\hat{\mu}_1^{PDT}=\bar{X}_1;\\
&\hat{\mu}_2^{MLE}=\hat{\mu}_2^{HP}=\bar{X}_2+\alpha(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^+,\hat{\mu}_2^{PDT}=\bar{X}_2+(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^+,\\
\boldsymbol{\omega}\in D_3 : &\hat{\mu}_1^{MLE}=\hat{\mu}_1^{HP}=\bar{X}_1-\beta(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^+,\hat{\mu}_1^{PDT}=\bar{X}_1-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^+;\\
&\hat{\mu}_2^{MLE}=\bar{X}_2+\alpha(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^+,\hat{\mu}_2^{HP}=\bar{X}_2-\alpha(\bar{X}_2-\bar{X}_1)^+,\hat{\mu}_2^{PDT}=\bar{X}_2.
\end{aligned}$$

3.1. 確率優越性

確率優越性を示すため、次の予備定理が必要である。

予備定理 3.1. a、b を定数とし、$\Phi(\cdot)$ を標準正規分布の累積分布関数とする。

$$g(z;a,b)=\Phi(a+bz)-\Phi(-a+bz),$$

とおくと、次の性質が成立つ。
(i) $g(z;a,b)=g(-z;a,b)$,
(ii) a と b は非負ならば、すべての $z<0$ に対して、 $g(z;a,b)$ は z の非減少関数であり、すべての $z>0$ に対して、 $g(z;a,b)$ は z の非増加関数である。

3.1.1. $\hat{\mu}_i^{MLE}$ と $\hat{\mu}_i^{HP}$ との比較

定理 3.2. $\boldsymbol{\omega}\in D_2$ ($\boldsymbol{\omega}\in D_3$) のとき $\hat{\mu}_1^{MLE}$ ($\hat{\mu}_2^{MLE}$) は $\hat{\mu}_1^{HP}$ ($\hat{\mu}_2^{HP}$) と異なり、確率的に優越する。

証明：まず、$\hat{\mu}_1^{MLE}$ は $\hat{\mu}_1^{HP}$ より確率的に優れていることを証明する。$\boldsymbol{\omega}\in D_2$ の場合のみ $\hat{\mu}_1^{MLE}$ と $\hat{\mu}_1^{HP}$ が異なるので、$\boldsymbol{\omega}\in D_2$ のとき、すべての $d>0$ に対して

$$P\{|\hat{\mu}_1^{MLE}-\mu_1|<d\}\geq P\{|\hat{\mu}_1^{HP}-\mu_1|<d\}$$

を証明すればよい。$P\{|\hat{\mu}_1^{MLE}-\mu_1|<d\}$ を次のように評価する。

$$P\{|\hat{\mu}_1^{MLE}-\mu_1|<d\}$$

$$
\begin{aligned}
&= P\{|\bar{X}_1-\mu_1|<d, \bar{X}_2 \geq \bar{X}_1\} + P\{|\alpha\bar{X}_1+\beta\bar{X}_2-\mu_1|<d, \bar{X}_2<\bar{X}_1\} \\
&= P\{-d<\bar{X}_1-\mu_1<d, \bar{X}_2 \geq \bar{X}_1\} \\
&\quad + P\{-d<\alpha(\bar{X}_1-\mu_1)+\beta(\bar{X}_2-\mu_1)<d, \bar{X}_2<\bar{X}_1\} \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

になる。次の変数変換

$$
Z_1=\alpha(\bar{X}_1-\mu_1)+\beta(\bar{X}_2-\mu_1), \quad Z_2=(\bar{X}_1-\mu_1)-(\bar{X}_2-\mu_1) \qquad (3.6)
$$

を行うと、$Z_1 \sim N(\beta\Delta, \sigma^2)$, $Z_2 \sim N(-\Delta, (\omega_1+\omega_2)/n)$ に従い、$cov(Z_1, Z_2)=0$ により、Z_1 と Z_2 は独立である。ここで、$\Delta=\mu_2-\mu_1$、$\sigma^2=(\alpha^2\sigma_1^2+2\alpha\beta\rho\sigma_1\sigma_2+\beta^2\sigma_2^2)/n$ である。$\bar{X}_1-\mu_1=Z_1+\beta Z_2$, $\bar{X}_2-\mu_1=Z_1-\alpha Z_2$, 及び $\bar{X}_1 \leq \bar{X}_2$ は $Z_2 \leq 0$ と同値であることがわかる。よって、(3.5) 式の第 1 項は

$$
\begin{aligned}
& P\{-d<Z_1+\beta Z_2<d, Z_2 \leq 0\} \\
&= P\left\{\frac{-d-\beta(Z_2+\Delta)}{\sigma}<\frac{Z_1-\beta\Delta}{\sigma}<\frac{d-\beta(Z_2+\Delta)}{\sigma}, Z_2 \leq 0\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\Delta} g(s)f(s)ds
\end{aligned}
$$

になる、ここで、 $f(\cdot)$ は $N(0, (\omega_1+\omega_2)/n)$ の密度関数で、 $g(s)=g(s; d/\sigma, -\beta/\sigma)$ である。記述を簡潔にするため、今後 $g(s)$ を使用する。同様に、(3.5) 式の第 2 項は

$$
P\{-d<Z_1<d, Z_2>0\}=g(\Delta)\int_{\Delta}^{\infty} f(s)ds
$$

になる。よって、

$$
P\{|\hat{\mu}_1^{MLE}-\mu_1|<d\}=\int_{-\infty}^{\Delta} g(s)f(s)ds+g(\Delta)\int_{\Delta}^{\infty} f(s)ds.
$$

同様に、$P\{|\hat{\mu}_1^{HP}-\mu_1|<d\}$ は

$$
\begin{aligned}
& P\{-d<\alpha\bar{X}_1+\beta\bar{X}_2-\mu_1<d, \bar{X}_1 \leq \bar{X}_2\}+P\{-d<\bar{X}_1-\mu_1<d, \bar{X}_1>\bar{X}_2\} \\
&= g(\Delta)\int_{-\infty}^{\Delta} f(s)ds+\int_{\Delta}^{\infty} g(s)f(s)ds.
\end{aligned}
$$

になる。予備定理 3.1 により $g(s)=g(-s)$ であり、また $f(s)=f(-s)$ により

$$
\begin{aligned}
& P\{|\hat{\mu}_1^{MLE}-\mu_1|<d\}-P\{|\hat{\mu}_1^{HP}-\mu_1|<d\} \\
&= \int_{-\infty}^{\Delta} g(s)f(s)ds-\int_{\Delta}^{\infty} g(s)f(s)ds+g(\Delta)\int_{\Delta}^{\infty} f(s)ds-g(\Delta)\int_{-\infty}^{\Delta} f(s)ds \\
&= \int_{-\Delta}^{\Delta}\{g(s)-g(\Delta)\}f(s)ds>0
\end{aligned}
$$

になる。$g(s)$ はすべての $s>0$ に対して、減少関数であるので、最後の不等式が成立する。

$\hat{\mu}_1^{MLE}$ は μ_1^{HP} より優れていることを証明した。同様に、$\boldsymbol{\omega}\in D_3$ のときにのみ、$\hat{\mu}_2^{MLE}$ は $\hat{\mu}_2^{HP}$ より異なり、優れていることを証明することができる。

3.1.2. $\hat{\mu}_i^{MLE}$ と $\hat{\mu}_i^{PDT}$ との比較

同様に、$\hat{\mu}_i^{MLE}$ と $\hat{\mu}_i^{PDT}$ との比較を行い、次の結果が得られる。
$\boldsymbol{\omega}\in D_2\cup D_3$ で両推定量が異なるが、 $\hat{\mu}_i^{MLE}$ が確率的に $\hat{\mu}_i^{PDT}, i=1,2,$ より優れていることを次の定理にまとめる。

定理 3.3. $\boldsymbol{\omega}\in D_2\cup D_3$ の場合、$\hat{\mu}_i^{MLE},(i=1,2)$ は $\hat{\mu}_i^{PDT}$ より確率的に優れている。つまり、すべての $d>0,$ に対して、

$$P_r\{|\hat{\mu}_i^{MLE}-\mu_i|<d\}\geq P_r\{|\hat{\mu}_i^{PDT}-\mu_i|<d\}$$

が成立する。

証明： $\boldsymbol{\omega}\in D_2$ の場合だけを考え、まず、$\hat{\mu}_1^{MLE}$ は確率的に $\hat{\mu}_1^{PDT}$ より優れていることを証明する。このケースにおいて、両推定量は $\bar{X}_1>\bar{X}_2$ で異なり、そのとき、$\hat{\mu}_1^{PDT}=\hat{\mu}_1^{HP}$ になる。 定理 3.2 の証明により、

$$\begin{aligned}
&P\{|\hat{\mu}_1^{MLE}-\mu_1|<d\}-P\{|\hat{\mu}_1^{PDT}-\mu_1|<d\}\\
&=P\{|\alpha\bar{X}_1+\beta\bar{X}_2-\mu_1|<d,\bar{X}_1>\bar{X}_2\}-P\{|\bar{X}_1-\mu_1|<d,\bar{X}_1>\bar{X}_2\}\\
&=\int_{\Delta}^{\infty}\{g(\Delta)-g(s)\}f(s)ds
\end{aligned}$$

になる。すべての $s>0$ に対して、$g(s)$ は s の減少関数であるので、上の積分は正になる。

次に、 $\hat{\mu}_2^{MLE}$ は $\hat{\mu}_2^{PDT}$ より確率的に優れていることを証明する。$\bar{X}_1>\bar{X}_2$ において、両推定量は異なるので、

$$\begin{aligned}
&P\{|\hat{\mu}_2^{MLE}-\mu_2|<d\}-P\{|\hat{\mu}_2^{PDT}-\mu_2|<d\}\\
&=P\{|\alpha\bar{X}_1+\beta\bar{X}_2-\mu_2|<d,\bar{X}_1>\bar{X}_2\}-P\{|\bar{X}_1-\mu_2|<d,\bar{X}_1>\bar{X}_2\}.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

になる。次のような変数変換を行う。

$$Y_1=\alpha(\bar{X}_1-\mu_2)+\beta(\bar{X}_2-\mu_2),\quad Y_2=(\bar{X}_1-\mu_2)-(\bar{X}_2-\mu_2)$$

そのとき、Y_1 と Y_2 は互いに独立で、おのおのに、$N(-\alpha\Delta, \sigma^2)$ 、 $N(-\Delta, (\omega_1+\omega_2)/n)$ 従う、ここで、$\sigma^2 = (\alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha\beta\rho\sigma_1\sigma_2 + \beta^2\sigma_2^2)/n$ である。 よって、(3.7) 式の第 1 項は次のように評価される。

$$
\begin{aligned}
&P\{-d < Y_1 < d, Y_2 > 0\}\\
&= P\left\{-\frac{d}{\sigma} + \frac{\alpha}{\sigma}\Delta < \frac{Y_1 + \alpha\Delta}{\sigma} < \frac{d}{\sigma} + \frac{\alpha}{\sigma}\Delta\right\} \times \int_\Delta^\infty f(s)ds\\
&= g\left(\Delta; \frac{d}{\sigma}, \frac{\alpha}{\sigma}\right)\int_\Delta^\infty f(s)ds
\end{aligned}
$$

ここで、$f(\cdot)$ は $N(0, (\omega_1+\omega_2)/n)$ の密度関数である。$\bar{X}_1 - \mu_2 = Y_1 + \beta Y_2$ になるので、(3.7) 式の第 2 項は次のように評価される。

$$
\begin{aligned}
&P\{-d < Y_1 + \beta Y_2 < d, Y_2 > 0\}\\
&= P\left\{-\frac{d}{\sigma} + \frac{\alpha}{\sigma}\left(\Delta - \frac{\beta}{\alpha}Y_2\right) < \frac{Y_1 + \alpha\Delta}{\sigma} < \frac{d}{\sigma} + \frac{\alpha}{\sigma}\left(\Delta - \frac{\beta}{\alpha}Y_2\right), Y_2 > 0\right\}\\
&= \int_\Delta^\infty g\left(\Delta - \frac{\beta}{\alpha}(s-\Delta); \frac{d}{\sigma}, \frac{\alpha}{\sigma}\right) f(s)ds.
\end{aligned}
$$

よって、(3.7) は

$$
\int_\Delta^\infty \left\{g\left(\Delta; \frac{d}{\sigma}, \frac{\alpha}{\sigma}\right) - g\left(\Delta - \frac{\beta}{\alpha}(s-\Delta); \frac{d}{\sigma}, \frac{\alpha}{\sigma}\right)\right\} f(s)ds
$$

になる。 $\beta < 0$ と予備定理 3.1 の (ii) により、$g(u; d/\sigma, \alpha/\sigma)$ は $u > 0$ の減少関数であることにより、上記の積分は正になる。

3.2. Pitman Nearness 評価基準

推定量の良さを評価するための基準としては MSE または確率優越性がよく利用される。一方、Pitman(1937) は以下のような評価基準を提案した。T_1 と T_2 を θ の推定量とし、下記の式が満たされれば、T_1 は T_2 より θ に近いと定義する。

$$
PN_\theta(T_1, T_2) = P\{|T_1 - \theta| < |T_2 - \theta|\} > 1/2.
$$

しかし、両推定量が正の確率で等しい場合、Nayak(1990) が次のような修正を提案した。

$$
P\{|T_1 - \theta| < |T_2 - \theta|\} > \frac{1}{2}P\{T_1 \neq T_2\}.
$$

Nayak の考えに沿って、Gupta、Sinha(1992) は修正した Pitman nearness(modified Pitman nearness)

$$MPN_\theta(T_1,T_2) = P\{|T_1-\theta| < |T_2-\theta| \mid T_1 \neq T_2\} = \frac{P\{|T_1-\theta| < |T_2-\theta|, T_1 \neq T_2\}}{P\{T_1 \neq T_2\}}.$$

を定義し、$MPN_\theta(T_1,T_2) > 1/2$ ならば、T_1 は T_2 より θ に近いと定義した。

この節では（修正した）Pitman nearness 評価基準の下で、$\hat{\mu}_i^{MLE}$ と $\hat{\mu}_i^{HP}$、$\hat{\mu}_i^{PDT}$ との比較をする。$\boldsymbol{\omega} \in D_3$ (D_2) の場合、$\hat{\mu}_1^{MLE} = \hat{\mu}_1^{HP}$ $(\hat{\mu}_2^{MLE} = \hat{\mu}_2^{HP})$ であるので、$\boldsymbol{\omega} \in D_2$ (D_3) の場合について、$\hat{\mu}_1^{MLE}$ $(\hat{\mu}_2^{MLE})$ と $\hat{\mu}_1^{HP}$ $(\hat{\mu}_2^{HP})$ との比較を行い次の結果が得られる。

定理 3.4. $\boldsymbol{\omega} \in D_2$ (D_3) の場合、$\hat{\mu}_1^{MLE}$ $(\hat{\mu}_2^{MLE})$ は $\hat{\mu}_1^{HP}$ $(\hat{\mu}_2^{HP})$ より μ_1 (μ_2) に近い。

証明：$\boldsymbol{\omega} \in D_2$ の場合、$\hat{\mu}_1^{MLE}$ は $\hat{\mu}_1^{HP}$ より μ_1 に近いことだけを証明する。$\boldsymbol{\omega} \in D_2$ のとき、$\beta < 0$ なので、 $\bar{X}_1 < \bar{X}_2$ のとき、$\hat{\mu}_1^{MLE} = \bar{X}_1 > \hat{\mu}_1^{HP} = \alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2$。同様に、 $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ のとき、$\hat{\mu}_1^{MLE} = \alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2 > \hat{\mu}_1^{HP} = \bar{X}_1$ が成立する。よって、確率 1 で、$\hat{\mu}_1^{MLE} > \hat{\mu}_1^{HP}$ になり、かつ $\hat{\mu}_1^{MLE} + \hat{\mu}_1^{HP} = (1+\alpha)\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2$ が成立する。また、$\hat{\mu}_1^{MLE} > \hat{\mu}_1^{HP}$ が成立することによって、$|\hat{\mu}_1^{MLE} - \mu_1| < |\hat{\mu}_1^{HP} - \mu_1|$ が成立するための必要十分条件は $\hat{\mu}_1^{MLE} + \hat{\mu}_1^{HP} < 2\mu_1$ が成立することである。よって、

$$P\{|\hat{\mu}_1^{MLE} - \mu_1| < |\hat{\mu}_1^{HP} - \mu_1|\} = P\{(1+\alpha)(\bar{X}_1 - \mu_1) + \beta(\bar{X}_2 - \mu_1) < 0\}. \quad (3.8)$$

(3.6) の変数変換により、$(1+\alpha)(\bar{X}_1 - \mu_1) + \beta(\bar{X}_2 - \mu_1) = 2Z_1 + \beta Z_2$ が成立するので (3.8) 式は

$$P\{2Z_1 + \beta Z_2 < 0\},$$

なる。$E[2Z_1 + \beta Z_2] = \beta\Delta \leq 0$ により、(3.8) 式は 1/2 以上である。

同様に、$\hat{\mu}_i^{MLE}$ と $\hat{\mu}_i^{PDT}$ との比較を行い、次の結果が得られる。証明は省略する。

定理 3.5. $\boldsymbol{\omega} \in D_2 \cup D_3$ の場合、$\hat{\mu}_i^{MLE}$ は $\hat{\mu}_i^{PDT}, i = 1, 2$ より μ_i に近い。

3.3. 二つの母平均に順序制約条件がある場合の線形関数の推定

この節では係数 c_i を用いた μ_i の線形結合 $\sum_{i=1}^{2} c_i\mu_i$ の推定問題を考える。MSE 基準の下で、 $\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ と $\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{HP}$ 及び $\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{PDT}$ との比較を行う。

$\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ が $\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{HP}$、$\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{PDT}$ それぞれよりよくなるための係数 $c_i, i=1,2$ に対する必要十条件を与える。3 推定量の線形結合の表現を下記のように整理する。

$$\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{MLE} = \begin{cases} c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2, & if\ \bar{X}_1 \le \bar{X}_2, \\ (c_1+c_2)(\alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2), & if\ \bar{X}_1 > \bar{X}_2. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{HP} = \begin{cases} c_1(\alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2) + c_2\bar{X}_2, & if\ \bar{X}_1 \le \bar{X}_2, \\ c_1\bar{X}_1 + c_2(\alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2), & if\ \bar{X}_1 > \bar{X}_2. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{PDT} = \begin{cases} c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2, & if\ \bar{X}_1 \le \bar{X}_2, \\ (c_1+c_2)\bar{X}_1, & if\ \bar{X}_1 > \bar{X}_2. \end{cases}$$

3.3.1. MSE 基準の下での $\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ と $\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{HP}$ との比較

定理 3.6 $\boldsymbol{\omega} \in D_2$ (D_3) の場合、MSE 基準の下で $\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ が $\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{HP}$ より優れているための係数 c_i に対する必要十分条件は $c_1c_2 \le 0, c_1 \ne 0$ $(c_1c_2 \le 0, c_2 \ne 0)$ である。

証明: $\boldsymbol{\omega} \in D_2$ の場合のみを考え、両推定量のリスクの差 ΔR を下のように評価する。

$$\begin{aligned}\Delta R &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^{2} c_i(\hat{\mu}_i^{MLE} - \mu_i)\right]^2 - \left[\sum_{i=1}^{2} c_i(\hat{\mu}_i^{HP} - \mu_i)\right]^2\right\} \\ &= c_1^2 E\left\{\left[(\bar{X}_1 - \mu_1)^2 - (\alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2 - \mu_1)^2\right]\left(I_{\bar{X}_1 \le \bar{X}_2} - I_{\bar{X}_1 > \bar{X}_2}\right)\right\} \\ &\quad +2c_1c_2\beta E\left\{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\left[(\bar{X}_2 - \mu_2)I_{\bar{X}_1 \le \bar{X}_2} - (\alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2 - \mu_2)I_{\bar{X}_1 > \bar{X}_2}\right]\right\},\end{aligned}$$

ここでは I_A は条件 A を満たす集合のインディケータ関数である。(3.6) 式の変換を行うと

$$\begin{aligned}\Delta R = c_1^2 E&\left[(\beta^2 Z_2^2 + 2\beta Z_1 Z_2)\left\{I_{Z_2 \le 0} - I_{Z_2 > 0}\right\}\right] \\ &+2c_1c_2\beta E\left[Z_2\left\{(Z_1 - \alpha Z_2 - \Delta)I_{Z_2 \le 0} - (Z_1 - \Delta)I_{Z_2 > 0}\right\}\right].\end{aligned}$$

Z_1 と Z_2 は互いに独立なので,

$$\begin{aligned}\Delta R =& c_1^2\beta^2 E\left\{(Z_2^2 + 2\Delta Z_2)\left[I_{Z_2 \le 0} - I_{Z_2 > 0}\right]\right\} \\ &-2c_1c_2\alpha\beta E\left[Z_2(Z_2 + \Delta)I_{Z_2 \le 0} - \Delta Z_2 I_{Z_2 > 0}\right]\end{aligned} \tag{3.9}$$

になる。$S = Z_2 + \Delta$ とすると S は平均が 0 の正規分布にしたがい、$Z_2 > 0 \iff S > \Delta$ である。よって、(3.9) の第 1 項は

$$T_1 = c_1^2\beta^2 E\left\{(S^2 - \Delta^2)\left[I_{S\le\Delta} - I_{S>\Delta}\right]\right\} = 2c_1^2\beta^2 E\left[(S^2-\Delta^2)I_{0<S\le\Delta}\right] \le 0 \quad (3.10)$$

であり、$\Delta > 0$ の場合、$T_1 < 0$ になる。(3.9) 式の第 2 項は

$$\begin{aligned} T_2 &= -2c_1c_2\alpha\beta E\left[S(S-\Delta)I_{S\le\Delta} - \Delta(S-\Delta)I_{S>\Delta}\right] \\ &= -2c_1c_2\alpha\beta E\left[S^2 I_{S\le\Delta} + \Delta^2 I_{S>\Delta}\right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

になる。$c_1c_2 \le 0$ 及び $\alpha\beta < 0$ により、T_2 は非正になる。従って、 $c_1 \neq 0, c_1c_2 \le 0$ ならば、$\Delta R \le 0$.

一方、(3.10), (3.11) より、$\Delta = 0$ の場合、$c_1c_2 > 0$ ならば、$\Delta R > 0$ になり、$\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ は $\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{HP}$ を一様に改良できない。

Remark 1. $c_1 \neq 0$,$\Delta \to \infty$ の場合, (3.10) $\to -\infty$ かつ (3.11) は有限な値に近づく。よって、$\Delta \to \infty$ のとき、$\Delta R \to -\infty$ に近づくことにより、$\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{HP}$ が $\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ を一様に改良するような c_1 及び c_2 が存在しない。$c_1 = 0$ のとき、両推定量は一致することに留意する。

3.3.2. MSE 基準の下での $\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ と $\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{PDT}$ との比較

この節では、MSE 基準の下で、$\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ が $\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{PDT}$ より優れているための係数 c_1,c_2 に対する必要十分条件を与える。そのため、下記の予備定理が必要である。証明は L'Hopital 法則を繰り返し利用すればよい。

予備定理 3.7. Z は $N(-\Delta, \eta^2)$ に従うとする。

$$\lim_{\Delta\to+\infty} \frac{E(Z^2 I_{Z\ge0})}{E(ZI_{Z\ge0)})} = 0$$

が成立する。

定理 3.8. $\boldsymbol{\omega} \in D_2$ (D_3) の場合、MSE 基準の下で、$\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ は $\sum_{i=1}^2 c_i\hat{\mu}_i^{PDT}$ より優れているための係数 $c_i, i = 1, 2$ に対する必要十分条件は、$c_1 + c_2 \neq 0$、$(c_1+c_2)(c_2\omega_1 - c_1\omega_2) \ge 0$ $(c_1 + c_2 \neq 0$、$(c_1+c_2)(c_1\omega_2 - c_2\omega_1) \ge 0)$ である。

証明： $\boldsymbol{\omega} \in D_2$ の場合についてだけ、証明する。 $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ のときのみ、両推定量が異なる。そのとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} c_i(\hat{\mu}_i^{MLE} - \mu_i) &= c_1(\alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2 - \mu_1) + c_2(\alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2 - \mu_2) \\ &= (c_1 + c_2)Z_1 - c_2\Delta\end{aligned}$$

及び、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} c_i(\hat{\mu}_i^{PDT} - \mu_i) &= (c_1 + c_2)(\bar{X}_1 - \mu_1) - c_2\Delta \\ &= (c_1 + c_2)(Z_1 + \beta Z_2) - c_2\Delta\end{aligned}$$

となる、ここで、Z_1 と Z_2 は (3.6) 式で与えられる。よって、$\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ での両推定量の２乗誤差の差は

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{i=1}^{2} c_i(\hat{\mu}_i^{MLE} - \mu_i)\right\}^2 - \left\{\sum_{i=1}^{2} c_i(\hat{\mu}_i^{PDT} - \mu_i)\right\}^2 \\ &= \{(c_1 + c_2)Z_1 - c_2\Delta\}^2 - \{(c_1 + c_2)(Z_1 + \beta Z_2) - c_2\Delta\}^2 \\ &= -(c_1 + c_2)^2(2\beta Z_1 Z_2 + \beta^2 Z_2^2) + 2(c_1 + c_2)c_2\Delta\beta Z_2\end{aligned}$$

になる。Z_1 と Z_2 は互いに独立で、$E[Z_1] = \beta\Delta$ に注意するとリスクの差は下記のように与えられる。

$$\begin{aligned}\Delta R &= -(c_1 + c_2)^2 E\left\{(2\beta Z_1 Z_2 + \beta^2 Z_2^2)I_{Z_2>0}\right\} + 2(c_1 + c_2)c_2\Delta\beta E\left\{Z_2 I_{Z_2>0}\right\} \\ &= -(c_1 + c_2)^2\beta^2 E\left(Z_2^2 I_{Z_2>0}\right) + 2(c_1 + c_2)(\alpha c_2 - \beta c_1)\beta\Delta E\left(Z_2 I_{Z_2>0}\right).\end{aligned}$$

$\beta < 0$ であるので、$(c_1 + c_2)(\alpha c_2 - \beta c_1) \geq 0$ ならば $\Delta R \leq 0$ となる.

一方、$(c_1 + c_2)(\alpha c_2 - \beta c_1) < 0$ ならば、予備定理 3.7 により十分大きな Δ に対して、$\Delta R > 0$ となる.

Remark 2. Z_2 は $N(-\Delta, (\omega_1 + \omega_2)/n)$ に従うので、$\Delta = 0$ のとき、リスクの差 $\Delta R = -(c_1 + c_2)^2\beta^2(\omega_1 + \omega_2)/(2n)$ になる。従って、$c_1 + c_2 \neq 0$ を満たす任意の c_1、c_2 に対して、$\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{PDT}$ は $\sum_{i=1}^{2} c_i\hat{\mu}_i^{MLE}$ を改良することが出来ない。また、$c_1 + c_2 = 0$ のとき、両推定量は一致する。

参考文献

[1] Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. and Brunk, H. D. *Statistical Inference under Order Restrictions*. Wiley, New York; 1972.

[2] Baranchik, A. J., *A Family of minimax estimation of the mean of a multivariate normal problems*. Ann. Math. Statist., 1970; Vol.41, pp. 642-645.

[3] Betcher, J. and Peddada, S. D. *Statistical inference under order restrictions in analysis of covariance using modified restricted maximum likelihood estimator*. Sankhya; 2009; 71-B, Part 1, 79–96.

[4] Chang Y.-T., *Stein-Type estimators for parameters in truncated space*. Keio Science and Technology Reports, 1982; Vol. 35, No.11, pp. 185-193.

[5] Chang, Y.-T., Oono, Y., Shinozaki, N., *Improved estimators for the common mean and ordered means of two normal distributions with ordered variances*. Journal of Statistical Planning and Inference, 2012; (142): 2619-2628.

[6] Chang, Y.-T., Fukuda, K., Shinozaki, N., *Estimation of two ordered normal means when a covariance matrix is known*. Statistics, 2017; (5): 1095-1104.

[7] Chang, Y.-T., Strawderman, W. E. *Simultaneous estimation of p positive normal means with common unknown variance*, Statistics and Probability Letters, 2017; 121: 83–89.

[8] Cohen, A. and Sackrowitz, B. *A discussion of some inference issues in order restricted models*. Canadian J. Statist., 2004; 32 (2) : 199–205.

[9] Fernández, M. A., Rueda, C., and Salvador, B. *Parameter estimation under orthant restrictions*. Canadian J. Statist., 2000; 28 (1) : 171–181.

[10] Gupta, R. D. and Singh, H. *Pitman nearness comparisons of estimates of two ordered normal means*. Austral. J. Statist., 1992; 34 (3) : 407–414.

[11] Hwang, J. T. *Universal domination and stochastic domination*. Ann. Statist., 1985; 13 (1): 295–314.

[12] Hwang, J. T., Peddada, S. D. *Confidence interval estimation subject to order restrictions*. Ann. Statist., 1994; 22 (1): 67–93.

[13] Katz, M. W., 1961. *Admissible and minimax of parameter in truncated spaces*. Ann. Math. Statist., Vol. 32, pp 136-1142.

[14] Lee, C. C. *Quadratic loss of order restricted estimators for treatment means with*

a control. Ann. Statist., 1988; 16 (2): 751–758.

[15] Marchand, E., Strawderman, W. E. *Estimation in restricted parameter spaces : A Review*. In A Festschrift for Herman Rubin, Institute of Mathematical Statistics, Lecture Notes-Monograph Series, 2004: Vol. 45, 21-24.

[16] Nayak, T. K. *Estimation of location and scale parameters using generalized Pitman nearness criterion*. Journal of Statistical Planning and Inference, 1990; 24 (2) :259–268.

[17] Peddada, S. D., Dunson, D. B., and Tan, X. . *Estimation of order-restricted means from correlated data*. Biometrika, 2005: 92: 703–715.

[18] Pitman, E. J. G. *The closest estimates of statistical parameters*. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1937; 33: 212–222.

[19] Robertson, T., Wright, F. T. and Dykstra, R. L. *Order Restricted Statistical Inference*. Wiley, New York; 1988.

[20] Rueda, C. and Salvador, B. *Reduction of risk using restricted estimators*. Commun. Statist.-Theory Meth., 1995; 24 (4): 1011–1022.

[21] Shinozaki, N. and Chang, Y-T. *A comparison of maximum likelihood and the best unbiased estimators in the estimation of linear combinations of positive normal means*. Statistics & Decisions, 1999; 17: 125–136.

[22] Silvapulle, M. J. and Sen, P. K. *Constrained Statistical Inference*. Wiley, New Jersey; 2004.

[23] Tan, X. and Peddada, S. D. *Asymptotic distribution of some estimators for parameters subject to order restrictions*. Statistics and Applications. 2000; 2: 7–25.

[24] Tsukuma, H., Kubokawa, T. *Stein's phenomenon in estimation of means restricted to a polyhedral convex cone.* . Journal of Multivariate Analysis, 2008: 99, 141-164.

[25] Van Eeden, C. *Restricted Parameter Space Estimation Problems*. Lecture notes in Statistics 188, Springer; 2006.

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 (張　元宗、篠崎信雄：基盤研究（C)18K11196）の助成を受けたものです。筆者は京都大学数理解析研究所（当研究所による研究旅費助成を受けています）及び RIMS 共同研究研究代表者筑波大学数理物質系数学域小池健一先生に感謝の意を表します。